

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ НА ЭКСТРЕМУМ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ CABRI 3D

Открытие нового в эксперименте предшествует его обоснованию!

1. ВВЕДЕНИЕ

Геометрические задачи на экстремум, сводящиеся к соответствующим задачам для функций вещественной переменной, составляют существенную часть традиционного школьного курса дифференциального исчисления.

Система динамической геометрии предоставляет инструменты для изучения функциональных свойств геометрических фигур: мы можем измерять длины, площади, объемы, углы в геометрических объектах, и изучать соотношения между ними. Деформируя геометрическую фигуру мы можем изучать, как при этом меняются соответствующие соотношения [7].

Среди геометрических задач на экстремум относительно мало пространственных задач. Это, видимо, объясняется большими требованиями к пространственному воображению, большей сложностью самих фигур и необходимых вычислений. С этими трудностями сталкиваются не только ученики, но и сами составители задач.

При динамическом исследовании вычислительных задач стереометрии и, в частности, задач на экстремум, с успехом используется пространственное конструирование, визуализация и оптимизация фигур в виртуальном пространстве. Для решения таких

задач предназначена система динамической геометрии Cabri 3D, версия 2.0, (Bainville и Laborde 2006). Соответствующая работа для задач планиметрии была проведена Шуманом (1998/2000).

С учетом вышесказанного предлагается метод изучения экстремальных свойств пространственных фигур, который при необходимости позволяет находить точки экстремума путем последовательного приближения:

1. Построение в виртуальном пространстве геометрических фигур, удовлетворяющих заданным условиям.
2. Визуализация фигур (рассмотрение в разных ракурсах).
3. Наблюдение над тем, как меняется одна из характеристик фигуры при непрерывном изменении другой характеристики.
4. Отыскание экстремальных свойств.
5. Отыскание точек экстремума путем последовательного приближения к ним.
6. Проверка инвариантности экстремальных свойств.
7. Обобщение результатов исследования в форме задач и теорем на экстремум в области стереометрии.

Этот метод предшествует точному решению задачи или доказательству соответствующей теоремы элементарными методами или методами дифференциального исчисления.

Этот метод не формализуем, так как он не требует указания целевой функции, напротив, сама целевая функция может быть объектом поиска.

Метод динамического преобразования в пространственных задачах на экстремум позволяет:

- составлять задачи эвристическими методами (индукция и аналогия, обобщение и специализация, частичный отказ от ограничений, абстрагирование и конкретизация) и доказывать отсутствие оптимальной фигуры с помощью контрпримера;

- открывать с помощью эвристических методов закономерности, которым подчиняются линейные размеры и объемы оптимальных фигур;

- выходить за рамки непосредственных расчетов (то есть решение возможно и тогда, когда численное решение слишком сложно или вообще невозможно);

- связывать синтетическую геометрию с арифметикой и алгеброй;

- углубить и расширить знание стереометрии;

- экспериментировать в виртуальном пространстве;

- тренировать пространственное воображение и динамичное и функциональное мышление.

Описанный выше метод заключается в соединении методической идеи «Открытие в процессе обучения» [10] с интерактивными компьютерными инструментами. Этот подход открывает, помимо обычного преподавания, обширное поле деятельности в области проектирования, организации коллективной работы и способствует привлечению к работе одаренных учащихся.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ НА ЭКСТРЕМУМ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Описанный выше метод иллюстрируется далее на нескольких примерах.

Предварительные замечания: Понимание динамического поведения объекта на экране компьютера обеспечивается возможностями компьютерной графики. Очевидно,

печатающие устройства не приспособлены для описания динамического процесса. Поэтому на приводимых далее иллюстрациях показаны лишь оптимальные фигуры.

Значок «рука» на рисунке указывает на точку на фигуре, перемещение которой приводит к деформации фигуры. Эта точка используется для варьирования параметров фигуры.

Получаемые в процессе работы значения различных характеристик фигуры округляются. Например, числа 1,67; 1,41 и 1,73 надо интерпретировать как $5/3$; $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$. Для оптимизируемых величин достаточно трех знаков после запятой при разрешающей способности экрана 1024×768 пикселей.

Пример 1. Среди призм, вписанных в сферу и имеющих в основании правильный многоугольник, найти призму наибольшего объема

Результаты исследования (рис. 1.1–1.4): Все призмы наибольшего объема с правильным n -угольником в основании имеют одинаковую высоту. При $n = 4$ такая призма является кубом. Отношение диаметра сферы к высоте призмы равно $\sqrt{3} : 1$. С увеличением n растет и оптимальный объем призмы, он стремится к наибольшему объему вписанного цилиндра (рис. 1.5).

Задача: Имеются ли аналогичные результаты для оптимальной поверхности призмы?

Пример 2. Правильная пирамида наибольшего объема, вписанная в сферу

Результаты исследования (рис. 2.1–2.4). Все правильные вписанные пирамиды наибольшего объема имеют одинаковую высоту. При $n = 3$ такая пирамида является тетраэдром. Отношение диаметра сферы к высоте пирамиды равно $3 : 2$. Наибольший объем растет вместе с n и стремится к наибольшему объему конуса среди всех вписанных конусов (рис. 2.5).

Задача. Имеются ли аналогичные результаты для оптимальной поверхности пирамиды?

Приведенные выше исследования можно обобщить для призм и пирамид, вписанных в поверхности вращения: эллипсоиды, параболоиды и однополостные гиперболоиды.

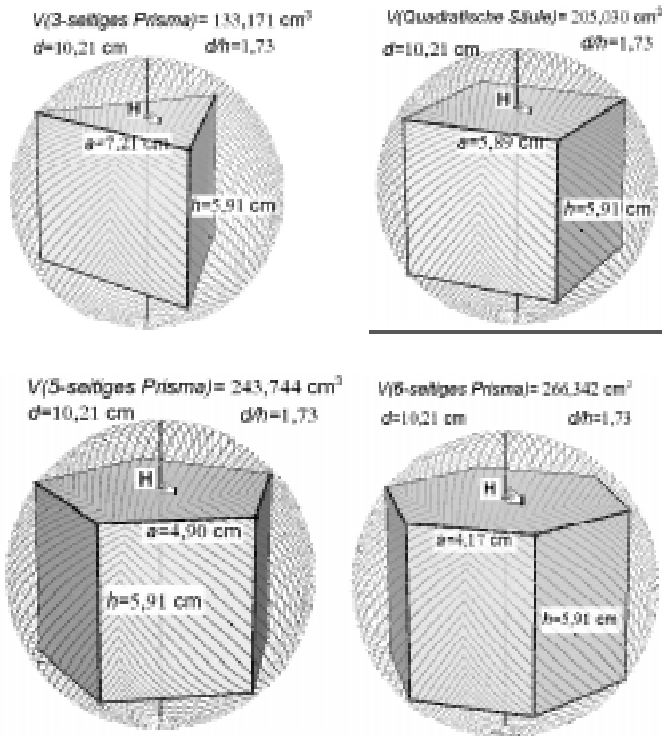


Рис. 1.1–1.4. Призмы наибольшего объема, вписанные в сферу

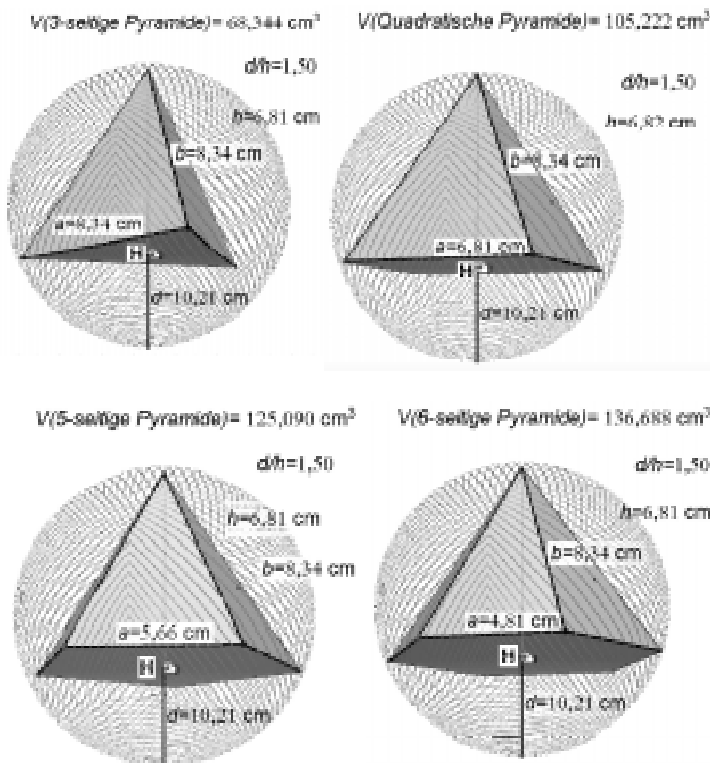


Рис. 2.1–2.4. Пирамиды наибольшего объема, вписанные в сферу

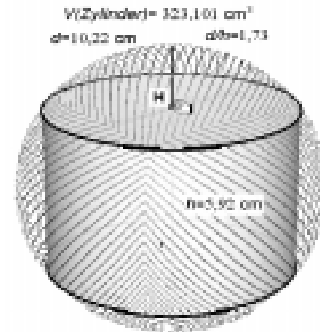


Рис. 1.5. Вписанный цилиндр наибольшего объема как предельный случай призмы

Рассмотрим теперь задачу оптимизации, двойственную по отношению к рассмотренной задаче.

Пример 3. Правильная n-гранная пирамида наименьшего объема, описанная вокруг сферы

Результаты исследования (рис. 3.1–3.4). Высота пирамиды наименьшего объема, описанной вокруг сферы, в два раза больше диаметра сферы. При $n = 3$ оптимальная пирамида является тетраэдром. С увеличением n объем уменьшается и стремится к минимальному объему описанного конуса (рис. 3.5).

Пример 4. Правильная n-гранная пирамида с наименьшей площадью поверхности, описанная вокруг сферы

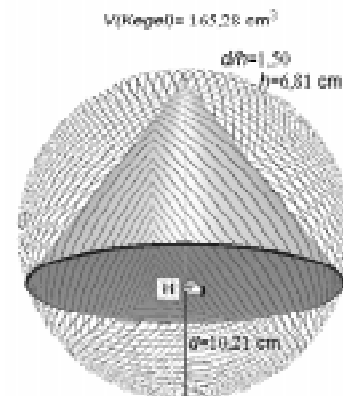


Рис. 2.5 Вписанный конус наибольшего объема как предельный случай пирамиды

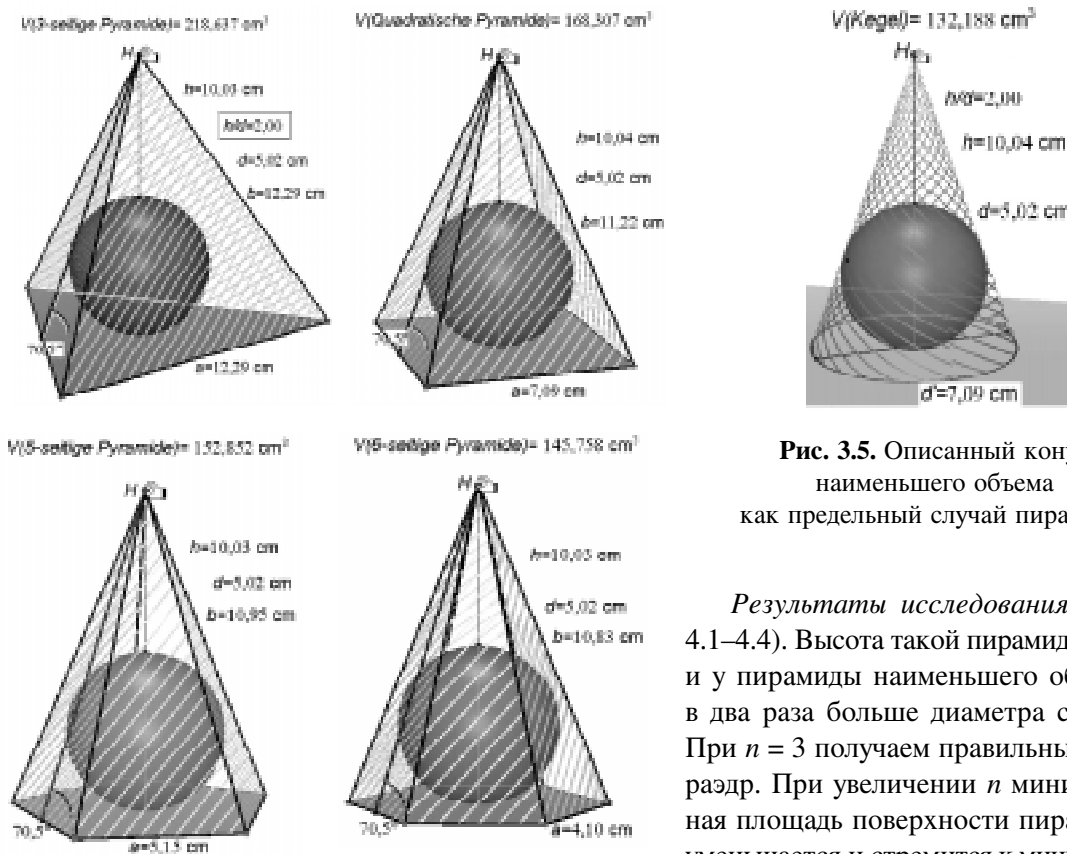


Рис. 3.1–3.4. Пирамиды наименьшего объема, описанные вокруг сферы

Рис. 3.5. Описанный конус наименьшего объема как предельный случай пирамиды

Результаты исследования (рис. 4.1–4.4). Высота такой пирамиды, как и у пирамиды наименьшего объема, в два раза больше диаметра сферы. При $n = 3$ получаем правильный тетраэдр. При увеличении n минимальная площадь поверхности пирамиды уменьшается и стремится к минимальной площади поверхности описанного конуса.

Далее следуют простые классические «изопериметрические задачи», для решения которых необходимы простые преобразования.

Пример 5. Призма наибольшего объема при заданной площади поверхности

При заданной площади поверхности O и вычисленной площади основания G вычисляем высоту призмы

$$h = (O - 2 \cdot G)/(n \cdot a);$$

a рассматривается как независимая переменная. Для $n = 3, 4, 5, 6$ выражаем G через a и затем, варьируя a , находим наибольший объем призмы.

Результаты исследования (рис. 5.1–5.4). Для $n = 3$ высота равна радиусу окружности, описанной около основания; при $n = 4$ оптимальная призма – это куб; при $n = 6$ высота оптимальной призмы равна $a\sqrt{3}$.

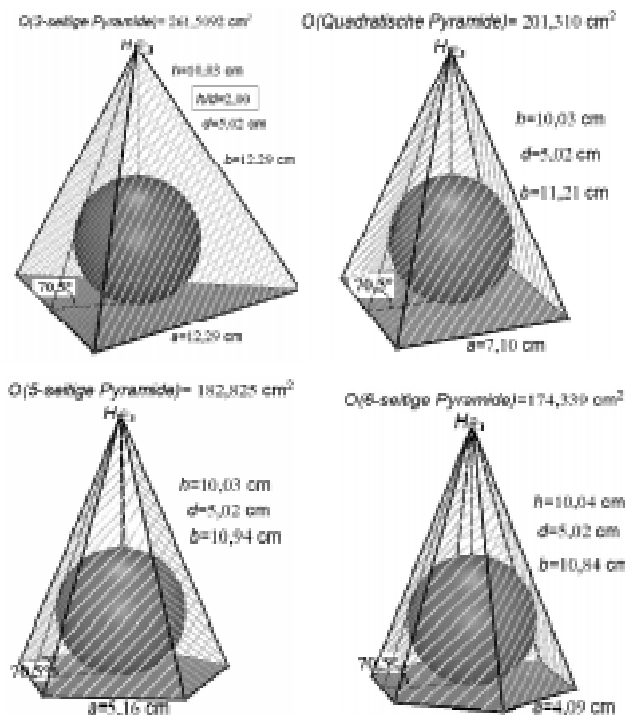


Рис. 4.1–4.4. Пирамиды с минимальной площадью поверхности, описанные вокруг сферы

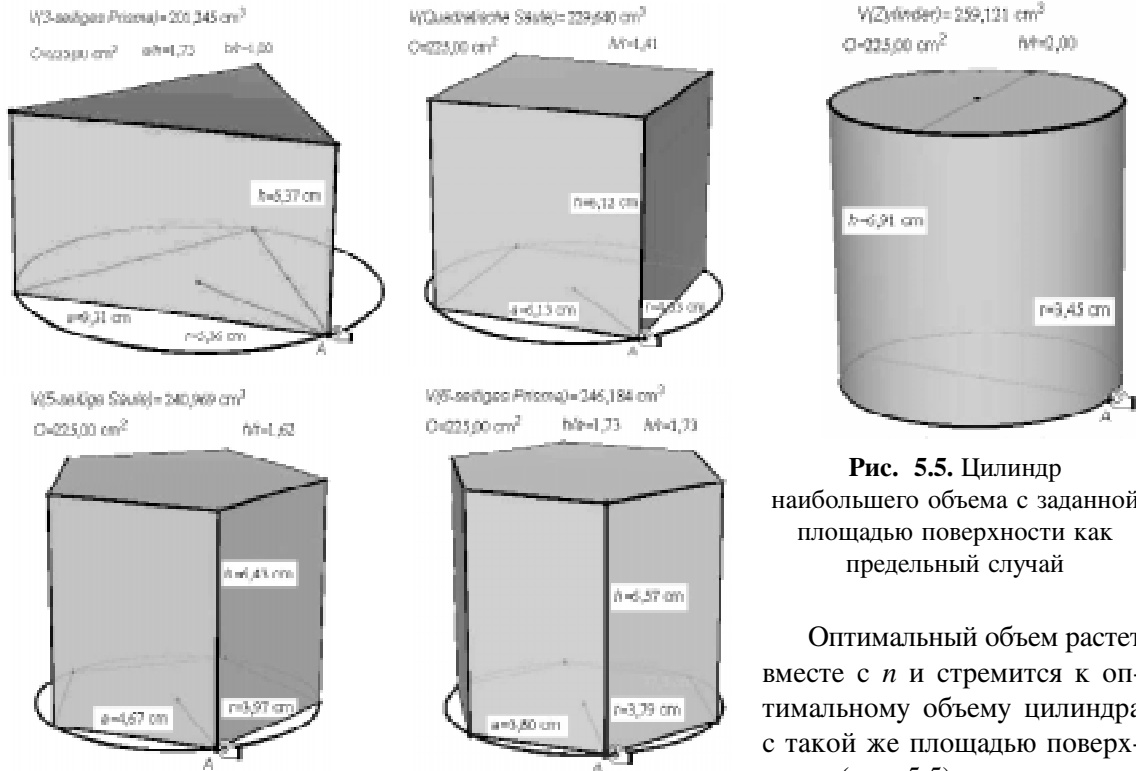


Рис. 5.5. Цилиндр наибольшего объема с заданной площадью поверхности как предельный случай

Рис. 5.1–5.4. Призмы наибольшего объема с заданной площадью поверхности

Оптимальный объем растет вместе с n и стремится к оптимальному объему цилиндра с такой же площадью поверхности (рис. 5.5), высота цилиндра равна диаметру основания. Далее рассмотрена задача, двойственная к предыдущей.

Пример 6. Минимизация площади поверхности при заданном объеме

Здесь высота призмы $h = V/G$, где V – заданный объем, а G – площадь основания, выраженная через сторону a основания. Варьируя a , находим оптимальные призмы при $n = 3, 4, 5, 6$.

Результаты исследования (рис. 6.1–6.4). Для $n = 3$ высота равна радиусу окружности, описанной около основания; при $n = 4$ оптимальная призма – это куб; при $n = 6$ высота оптимальной призмы равна $a\sqrt{3}$.

Оптимальная площадь поверхности уменьшается с увеличением n и стремится к оптимальной площади поверхности цилиндра того же объема (рис. 6.5), у которого высота равна диаметру основания.

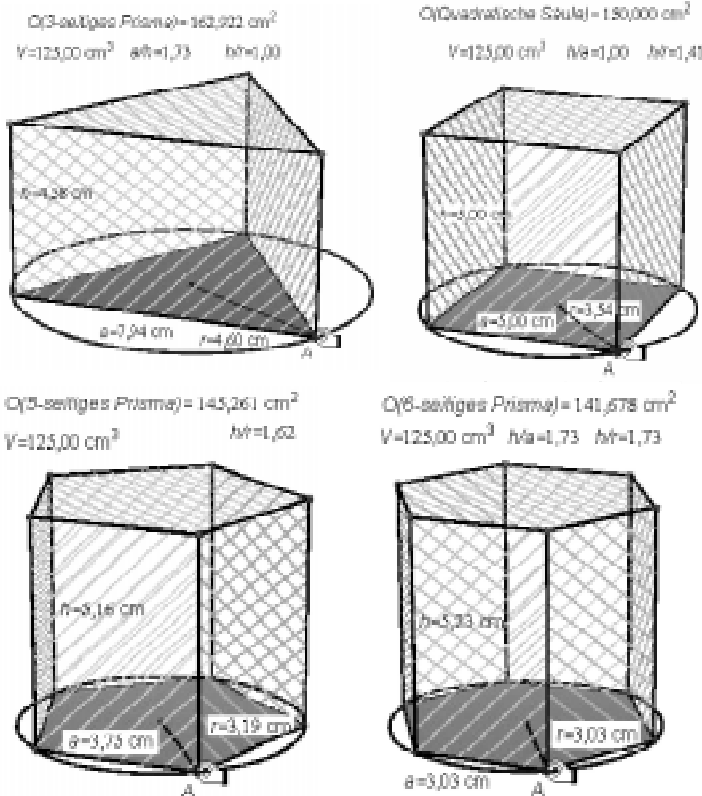


Рис. 6.1–6.4. Призмы с минимальной поверхностью при заданном объеме

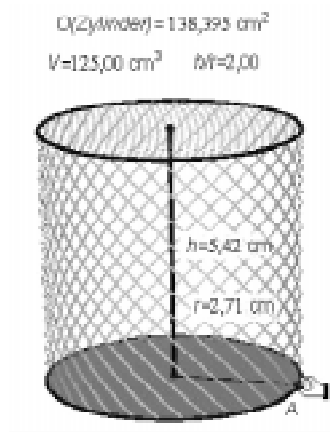


Рис. 6.5. Цилиндр с минимальной поверхностью как предельный случай

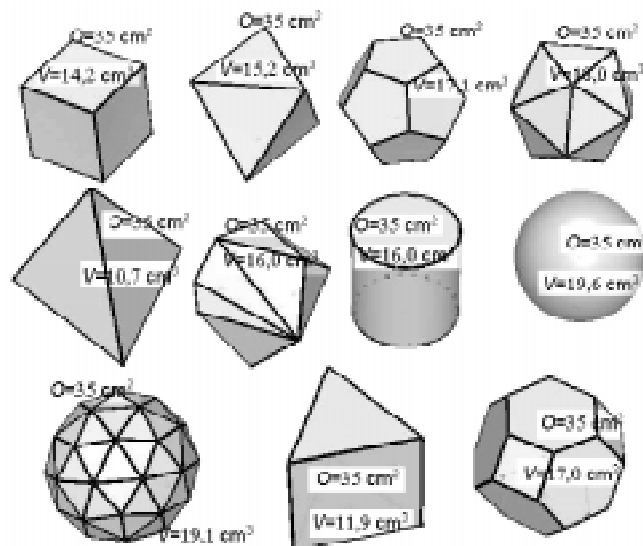


Рис. 7.1. Тела с одинаковой площадью поверхности

Пример 7. «Изопериметрическая задача» для выпуклых тел

Требуется найти тело, которое при заданной площади поверхности (объеме) имеет наибольший объем (наименьшую площадь поверхности). Как известно, среди всех кривых на плоскости, имеющих одинаковую длину, (ограничивающих одинаковую площадь), окружность ограничивает наибольшую площадь (имеет наименьшую длину). Пространственный аналог этой теоремы таков: среди всех тел, имеющих одинаковую площадь поверхности, (имеющих одинаковый объем), шар имеет наибольший объем (наименьшую площадь поверхности). Решение общей изопериметрической задачи не может быть получено средствами дифференциального исчисления.

Чтобы получить результат индуктивным методом или рассмотреть частный случай задачи, выберем для исследования тело (рис. 7.1, таблица тел), измерим сначала площадь поверхности и объем, затем деформируем тело при примерно постоянной площади поверхности, вычисляя при этом объем.

Результаты исследования. Объем растет в следующей последовательности: правильный тетраэдр, треугольная призма с одинаковыми ребрами, куб, правильный октаэдр, мно-

гогранник с 20 треугольными гранями, круговой цилиндр с квадратным осевым сечением, усеченный октаэдр, правильный додекаэдр, правильный икосаэдр, геодезический шар (80-гранник, построенный из правильного икосаэдра), шар. Для тел с одинаковой площадью поверхности, для которых существуют вписанная и описанная сферы верно следующее: чем больше граней, то есть чем более «сферично» тело, тем больше его объем.

Такая же последовательность получается, если для каждого тела подсчитать так называемое изопериметрическое отношение

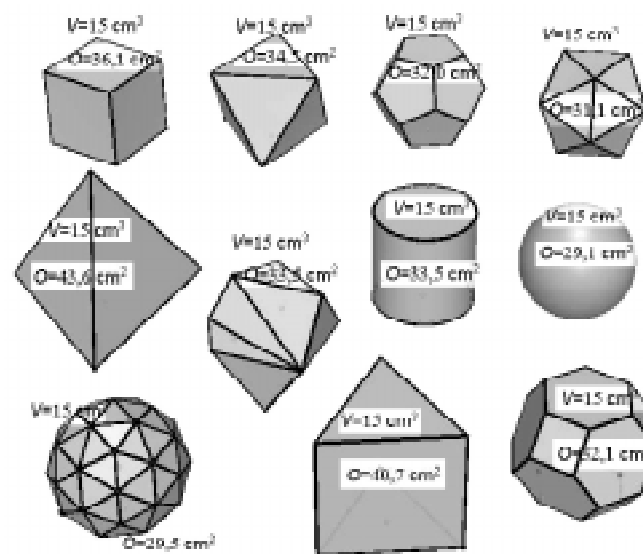


Рис. 7.2. Тела одинакового объема

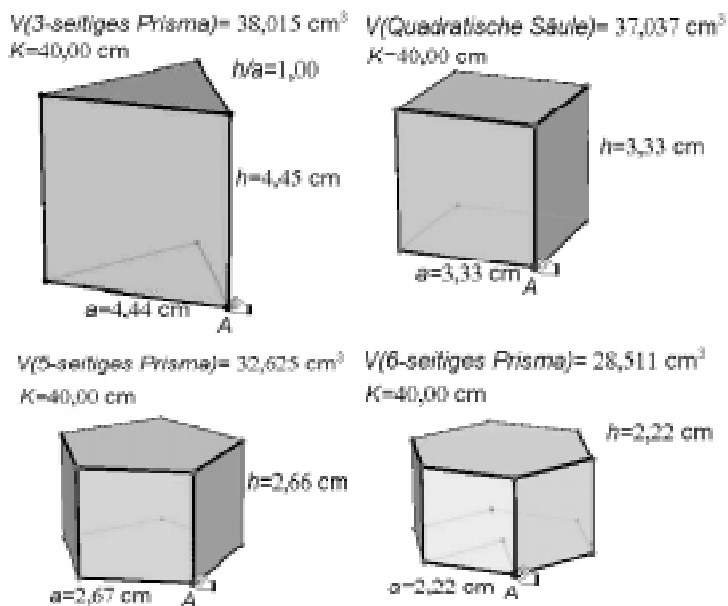


Рис. 8.1–8.4. Призмы наибольшего объема при заданной сумме ребер

$\pi(6V)^2/O^3$, получаемое из изопериметрического неравенства: $O^3 \geq \pi(6V)^2$ (« \Rightarrow » равенство достигается для шара).

Исследование тел одинакового объема дает ту же последовательность тел с убывающей площадью поверхности (рис. 7.2).

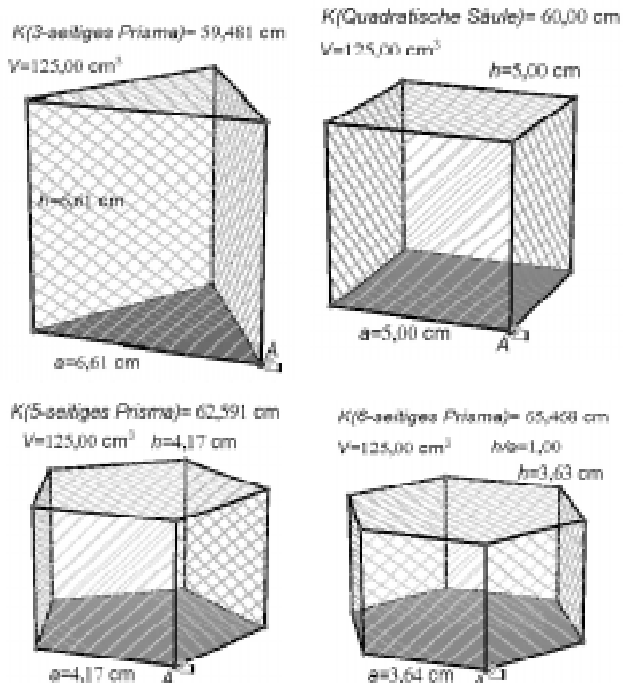


Рис. 9.1–9.4. Призмы с минимальной суммой ребер при заданном объеме

Другой аналог плоской параметрической задачи для правильного многоугольника: среди всех правильных призм с заданной суммой ребер, найти призму наибольшего объема или с наименьшей площадью поверхности. (Важные аналогичные задачи возникают при выборе других классов многогранников).

Пример 8. Максимизация объема правильной призмы при заданной сумме ребер

Для заданной суммы ребер K вычисляем высоту

$$h = (K - 2 \cdot n \cdot a) / n;$$

при этом a рассматривается как независимая переменная. Строим n -гранные призмы при $n = 3, 4, 5, 6$. Перемещая точку A , варьируем параметр a .

Результаты исследования (рис. 8.1–8.4). N -гранная призма наибольшего объема имеет одинаковые ребра, то есть является Архимедовой призмой.

Оптимальный объем уменьшается с увеличением n . Чему равен предел этих объемов?

Пример 9. Минимизация суммы ребер при заданном объеме правильной призмы

Результаты исследования (рис. 9.1–9.4). Минимум суммы ребер при заданном объеме достигается для призмы с одинаковыми ребрами.

Оптимальная сумма ребер возрастает с n . Каков предел этих сумм?

Задание. Добавьте аналогичные дуальные задачи для суммы ребер и площади поверхности.

Для правильной пирамиды имеет множество других экстремальных задач (пример 10, пример 11).

Пример 10. Оптимизация объема при заданной длине боковых ребер

Результаты исследования. Отношение высоты пирамиды к заданной длине бокового ребра имеет одно и то же значение

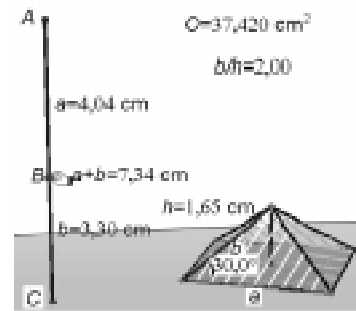
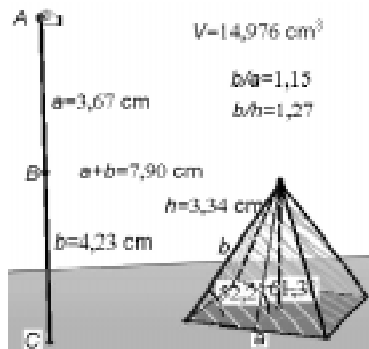
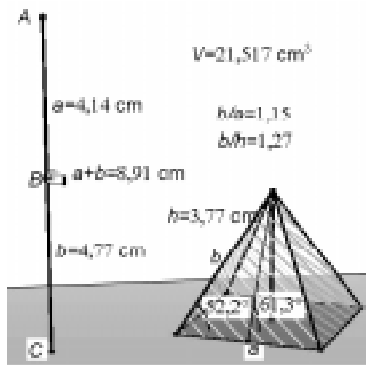


Рис. 12.1–12.2. Пирамида максимального объема при заданной сумме бокового ребра и стороны основания

Рис. 12.3. Пирамида с максимальной площадью поверхности при заданной сумме бокового ребра и стороны основания

ние для пирамид максимального объема, то есть угол между ребром и основанием оптимальной пирамиды один и тот же. Такой же угол между образующей конуса и его основанием – предельный случай пирамиды.

Пример 11. Оптимизация объема при заданной площади боковой поверхности

Результаты исследования. При заданной площади боковой грани или боковой поверхности боковая грань имеет один и тот же угол для пирамид минимального объема.

Далее приводятся исследования правильной пирамиды, при заданных суммах длин любых пар: a (сторона основания), b (боковое ребро) и h (высота).

Пример 12. Максимизация объема и площади поверхности пирамиды при заданной сумме бокового ребра и стороны основания

На рис. 12.1 показана пирамида максимального объема при $n = 4$. При варьировании значения суммы сохраняется отношение параметров (рис. 12.2). Соответствующая оптимальная пирамида при $n = 3$ – правильный тетраэдр.

При $n = 4$ для пирамиды с максимальной поверхностью отношение b к h равно $2 : 1$, то есть боковое ребро образует с основанием угол 30° (рис.

12.3). При $n = 3$ соответствующая пирамида – тетраэдр. При $n \geq 5$ максимальную поверхность имеет только вырожденная пирамида ($h = 0$).

Пример 13. Оптимизация объема n -гранной пирамиды при заданной сумме стороны основания и высоты пирамиды

Максимальный объем достигается при $a/h = 2$, то есть, когда угол между гранью и основанием равен $180^\circ/n$ (рис. 13.1–13.4).

Задание: К чему стремится максимальный объем при $n \rightarrow +\infty$? Как себя ведет поверхность пирамиды?

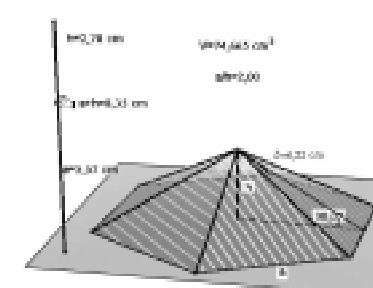
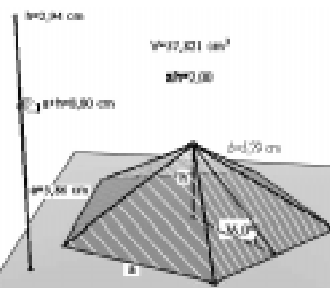
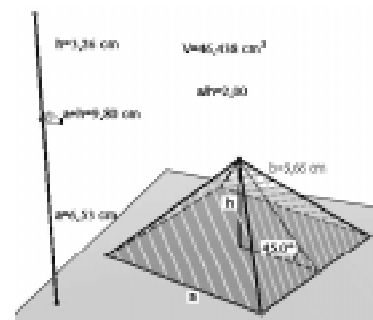
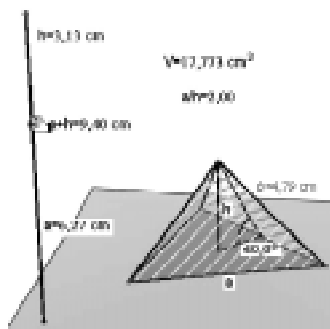


Рис. 13.1–13.4. Пирамиды максимального объема при заданной сумме стороны основания и высоты пирамиды

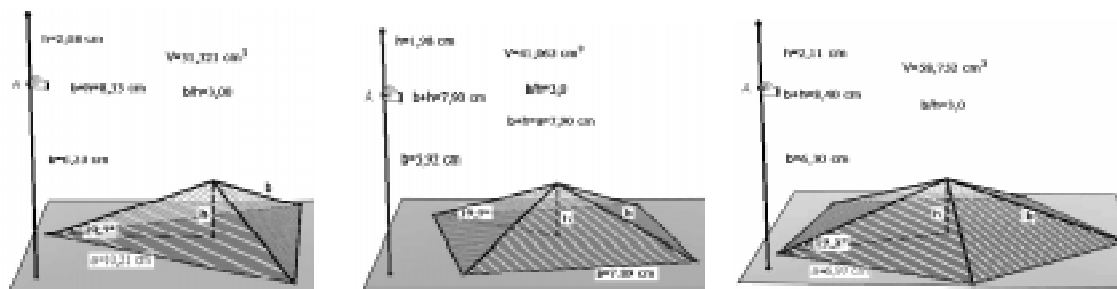
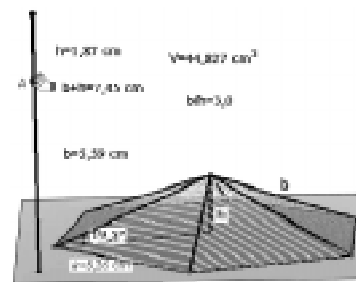


Рис. 14.1–14.4. Пирамиды максимального объема при заданной сумме бокового ребра и высоты пирамиды

Пример 14. Оптимизация объема n -гранной пирамиды при заданной сумме бокового ребра и высоты пирамиды.

Максимальный объем достигается при $b/h = 3$, то есть когда синус угла наклона ребра равен $1/3$. При $n = 4$ сумма бокового ребра и высоты равна стороне основания и боковая грань образует с основанием угол 45° (рис. 14.1–14.4).



Задание: К чему стремится максимальный объем при $n \rightarrow +\infty$? Как себя ведет поверхность пирамиды?

(Продолжение следует)

Литература

1. Bainville E., Laborde J.-M. (2005/2006): Cabri 3D 2.0. (Software). Grenoble: Cabrilog, Deutsche Version, bearbeitet von H. Schumann, zu beziehen von: www.cotec.de
2. Gusev V et al. (1988): Solving Problems in Geometry. Moscow: Mir Publishers.
3. Pylya G. (1962): Mathematik und Plausibles Schliessen. Band 1: Induktion und Analogie in der Mathematik. Basel: Birkhäuser.
4. Schumann H. (1997): Neue Standards für das Lösen geometrischer Berechnungs-aufgaben durch Computernutzung. Alter Wein – in neuen Schläuchen? In: MNU. Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht. 50 (3). S. 172–175.
5. Schumann H. (1998): Interaktive Arbeitsblätter für das Geometrielernen. In: Mathematik in der Schule 36(10). S. 562–569.
6. Schumann H. (1998): Geometrische Extremwertaufgaben in dynamischer Behandlung. In: ZDM Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 30(6). S. 215–223.
7. Schumann, H. (2000): Computerisierte Behandlung funktionaler Beziehungen an geometrischen Figuren. In: Mathematik in der Schule, 38(2). S. 109–119.
8. Schumann H. (2000): Computerunterstützte Bearbeitung geometrischer Extremwertaufgaben. Hildesheim: Franzbecker.
9. Strubecker K. (1967): Einführung in die Höhere Mathematik. Band II. München: Oldenbourg.
10. Winter H. (1989): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Braunschweig: Vieweg.



Наши авторы, 2007
Our authors, 2007

Prof. Dr. Heinz Schumann
Faculty III, Mathematics/Informatics,
University of Education Weingarten
D-88250 Weingarten, Germany
schumann@ph-weingarten.de

Перевод М. Юдовина